



TITLE:

# $C^*$ -代数の接合積の双対性と Olesen不変量 $P(\alpha)$ について (Banach空間におけるOperatorの研究)

AUTHOR(S):

岸本, 晶孝; 高井, 博司

---

CITATION:

岸本, 晶孝 ...[et al].  $C^*$ -代数の接合積の双対性とOlesen不変量 $P(\alpha)$ について  
(Banach空間におけるOperatorの研究). 数理解析研究所講究録 1977, 290: 130-142

ISSUE DATE:

1977-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106154>

RIGHT:

## $C^*$ 代数の接合積の双対性と Aleson 不変量 $P(\mathcal{A})$

について

京大 理 岸本晶孝

都立大理 高井博司

### §1. 序論

Ⅲ型因子環の構造理論は、最近、Connes と Takesaki を中心にその全容を明らかにしつつあるが、その中で決定的な役割を果たしているのが、Connes による不変量  $S(\mathcal{M})$  と、Takesaki による  $W^*$ 代数の接合積の双対定理である。その結果、Ⅲ型理論は、Ⅱ型の理論と力学系の研究に移行され得る：とが示された。(cf: [3], [15]) 一方、 $C^*$ 代数に関して、Takesaki は、非Ⅰ型  $C^*$ 代数の典型と云える UHF-代数を或る種の可換 compact 群によって  $C^*$ 接合積を作るとⅠ型  $C^*$ 代数になる事を示した。([17]) この結果と  $W^*$ 代数の双対定理に刺激されて、Takai は可換群による  $C^*$ 代数の接合積の双対性を論じたが、([13]) Nakagami により、非可換群による  $W^*$ 代数の接合積の双対性が示されると、([9]) Imai と共同で非可換群のそれに拡張された。([7]) 他方、Connes 不変量  $S(\mathcal{M})$  は、同じく Connes による  $P(\mathcal{A})$  に  $\{0\}$  を加えたものになっているが、

話が  $C^*$  代数になると射影による定義は一般的に意味を持たなくなる。そこで、Olesen は、射影の代りに、遠伝的な  $C^*$  代数を用いて Connes 不変量  $P(\alpha)$  の  $C^*$  代数的解釈を行なった。( [10] ) 更に、Olesen, Pedersen と Skjerve は、単純環  $\mathcal{O}$  と有限巡回群  $\mathbb{Z}/p$  について、 $C^*$  カルテ系  $(\mathcal{O}, \mathbb{Z}/p, \alpha)$  を考えた時、 $\mathcal{O}$  の  $\alpha$  による不動点のなす  $C^*$  代数  $\mathcal{O}^\alpha$  が素である為の必要十分条件を  $P(\alpha) = Sp(\alpha)$  でとらえた。又この時、 $\mathcal{O}^\alpha$  が単純であることも示した。( [11] ) 可換な  $W^*$  カルテ系  $(\mathcal{M}, G, \alpha)$  に対して、Connes と Takesaki は、 $P(\alpha)$  を  $W^*$  接合積  $G \otimes \mathcal{M}$  上の  $\alpha$  の双対作用  $\hat{\alpha}$  で特徴付けた。( [4] ) 更にこの非可換化を Nakagami が示している。( [9] )

我々はこの講演に於いて、単純環  $\mathcal{O}$  と、可換 discrete 群  $G$  について、 $C^*$  カルテ系  $(\mathcal{O}, G, \alpha)$  に対して、Olesen 不変量  $P(\alpha)$  は  $\mathcal{O}$  の Multiplier 代数  $M(\mathcal{O})$  の、 $\alpha$  の  $M(\mathcal{O})$  への拡張作用  $\bar{\alpha}$  による  $C^*$  接合積  $C^*(M(\mathcal{O}); \bar{\alpha})$  上への  $\bar{\alpha}$  の双対作用  $(\bar{\alpha})^\wedge$  を  $C^*(M(\mathcal{O}); \bar{\alpha})$  の中心代数  $\mathcal{Z}_{C^*(M(\mathcal{O}); \bar{\alpha})}$  に制限した時の kernel 群になっていることを示す。このことは、Connes-Takesaki の結果の  $C^*$  代数的解釈を与えている。更に、Olesen, Pedersen, Skjerve の結果を、可換 compact な  $C^*$  カルテ系  $(\mathcal{O}, G, \alpha)$  に対して拡張する。又一般に、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  は  $\mathcal{O}^\alpha$  の単純性と同値にならないことを示す。最後に、 $C^*$  接合積の双対性を用いて、 $C^*$

接合積  $C^*(\mathcal{O}; \alpha)$  が素である為の必要十分条件は  $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$  であることを示す。よって特に、CAR-代数  $\mathcal{O}(g)$  上への *gauge* 作用  $\alpha$  に関して、 $\Gamma(\alpha) = \mathbb{Z}$  となるので、 $C^*(\mathcal{O}(g); \alpha)$  は原始的となり、 $\Gamma(\alpha) = \ker \hat{\alpha} |_{\mathcal{Z}_{C^*(\mathcal{O}(g); \alpha)}} = \mathbb{Z}$  を得る。

## §2. 準備.

$(\mathcal{O}, G, \alpha)$  を  $C^*$ -力学系とする。(cf: [14])  $\mathcal{O}$  に値をとる  $G$  上の Bochner 可積分関数全体に、

$$(2.1) \quad \begin{cases} (xy)(g) = \int_G x(h) \alpha_g[y(h^{-1}g)] dh \\ x^*(g) = \delta(g)^{-1} \alpha_g[x(g^{-1})]^* \\ \|x\|_1 = \int_G \|x(g)\| dg \end{cases}$$

なる Banach  $*$ -代数の構造を入れたものを  $L^1_\alpha(G; \mathcal{O})$  と書く。その展開環を  $C^*(\mathcal{O}; \alpha)$  と書き、 $\mathcal{O}$  の  $\alpha$  による  $C^*$ -接合積 と云う。

$\text{Cov rep}(\mathcal{O}, G)$  を  $\mathcal{O}$  の共変表現全体とし、 $\text{Rep } \mathcal{O}$  を  $\mathcal{O}$  の非退化表現全体を表わすものとする。 $S \in \text{Rep } \mathcal{O}$  に対して、 $\text{Ind } S$  で

$$(2.2) \quad \begin{cases} (\overline{S}(\alpha) \gamma)(g) = S \circ \alpha_g^{-1}(\alpha) \gamma(g) \\ (\lambda(h) \gamma)(g) = \gamma(h^{-1}g) \end{cases}$$

なる  $(\overline{S}, \lambda) \in \text{Cov rep}(\mathcal{O}, G)$  に対応する  $C^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$  の表現とする。

ただし  $\gamma$  は  $S$  の表現空間  $\mathcal{H}_S$  に値をとる  $G$  上の二乗可積分関数全体  $L^2(G; \mathcal{H}_S)$  を動くものとする。そして、 $L^2_\alpha(G; \mathcal{O})$  を

$$\|x\|_2 = \sup \{ \|\text{Ind } S(x)\| : S \in \text{Rep } \mathcal{O} \}$$

なる  $C^*$ -norm で完備したものを  $C^*_\alpha(\mathcal{O}; \alpha)$  と書き、 $\mathcal{O}$  の  $\alpha$  によ

る縮約された  $C^*$  接合積と呼ぶ。位相群  $G$  が *amenable* であるとき、 $C^*(\mathcal{A}; \alpha) = C_r^*(\mathcal{A}; \alpha)$  となる。 ([13])

今から  $G$  を *locally compact* な可換群とする。  $\mathcal{A}$  の部分  $C^*$ -代数  $\mathcal{B}$  が 道徳的 であるとは、  $\mathcal{B}$  の正の部分  $\mathcal{B}_+$  が  $\mathcal{A}_+$  の中で *face* になることである。そこで、 $P(\alpha) = \bigcap_{\theta} Sp(\alpha^\theta)$  とおく。ただし  $\mathcal{B}$  は  $\mathcal{A}$  の  $\{0\}$  でない  $\alpha$ -不変な道徳的  $C^*$ -部分代数である。 ([10]) その時、 $P(\alpha)$  は  $G$  の双対群  $\hat{G}$  で、閉部分群になる。  $G$  は可換であるから、

$$(2.3) \quad \hat{\alpha}_p(x)(\gamma) = \overline{\langle \gamma, p \rangle} x(\gamma) \quad (x \in L^1_\alpha(G; \mathcal{A}), p \in \hat{G})$$

なる  $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  上の作用  $\hat{\alpha}$  が  $\hat{G}$  から定まる。そして  $C^*$ -力学系  $(C^*(\mathcal{A}; \alpha), \hat{G}, \hat{\alpha})$  から作られる  $\mathcal{A}$  の二重接合積  $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})$  は  $\mathcal{A}$  と  $L^1(G)$  上の完全連続作用素の作る  $C^*$ -代数  $C(L^1(G))$  との  $C^*$ -tensor 積  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^1(G))$  と同型であることが分かり、更に  $\hat{\alpha}$  の双対作用  $\hat{\alpha}$  は、 $\alpha$  と  $Ad(\lambda)$  との対称 <sup>(tensor)</sup> 作用  $\alpha \otimes Ad(\lambda)$  と同値になることが得られる。 ([13])

最後に、 $W^*$ -代数に於ける因子代数の役割を果たす  $C^*$ -代数の性質として、次の3つの種類の  $C^*$ -代数が考えられる。一つは自明でない閉 *ideal* を持たない  $C^*$ -代数で、単純  $C^*$ -代数と呼ばれる。その時には、忠実な既約表現をもつが、この性質を持つ  $C^*$ -代数を 原始的 な  $C^*$ -代数であると言う。  $\mathcal{A}$  が原始的である時には、 $x\mathcal{A}y = (0)$  ならば  $x=0$  か  $y=0$  であることは容易に分

かるが、この性質を持つ  $C^*$  代数を、素な  $C^*$  代数であると言う。  
 $\mathcal{O}$  が可分な時は、素ならば原始的であることが分かり両性質は同じである。 ([5])

### §3. 離散可換 $C^*$ 力学系に対する $P(\alpha)$ について

$C^*$  力学系  $(\mathcal{O}, G, \alpha)$  について、今  $G$  を離散可換群と仮定すると、 $C^*(\mathcal{O}; \alpha)$  の任意の要素  $x$  に対して、

$$(3.1) \quad (Ind \pi)(x)_{g,h} = \pi \circ \alpha_g^{-1} [x(gh^{-1})], \quad \pi \in Rep \mathcal{O}$$

なる  $\mathcal{O}$  の要素の族  $(x(g))_{g \in G}$  が一意に存在する。ただし  $(Ind \pi)(x)_{g,h}$  は、 $(Ind \pi)(x)$  の  $\ell^2(G; \mathcal{O}_\pi)$  上の  $(g,h)$ -番目の行列因子である。この時、 $x \sim (x(g))_{g \in G}$  と書くことにする。 $\mathcal{O}$  の *Multiplier* 代数  $M(\mathcal{O})$  上の  $\alpha$  の拡張作用  $\overline{\alpha}$  を考えた時、 $C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$  が作れて、 $G$  が可換であるから、 $C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha}) = C^*_r(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$  となる。 ([13])  
 (2.3) と (3.1) より、

$$(\overline{\alpha})_p^\wedge(x)(g) = \overline{\langle g, p \rangle} x(g), \quad x \sim (x(g))_{g \in G}, x \in C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$$

が成立する。そして、 $\mathcal{O}$  を単純と仮定すると、 $C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})$  の中心代数  $\mathcal{Z}_{C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})}$  の任意の要素  $x$  に対して次の補助定理が成り立つ。

補助定理 3.1.  $x \in \mathcal{Z}_{C^*(M(\mathcal{O}); \overline{\alpha})}$  で  $x \sim (x(g))_{g \in G}$  とする。

$x(g) \neq 0$  ならば、 $g \in P(\alpha)^\perp$  である。

上の結果と、Olesen の定理を使うと、 $W^*$  力学系の Connes-Takesaki の結果の  $C^*$  力学系解釈を与えることができる。

定理 3.2.  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  を  $C^*$ -力学系とし、 $\mathcal{A}$  を単純、 $G$  は離散可換群とする。 $\mathcal{A}$  の Multiplier 代数を  $M(\mathcal{A})$  とし、その上の  $\alpha$  の拡張作用を  $\bar{\alpha}$  とする。 $C^*(M(\mathcal{A}); \bar{\alpha})$  の中心代数を  $Z_{C^*(M(\mathcal{A}); \bar{\alpha})}$  とした時、

$$P(\alpha) = \ker(\bar{\alpha})^\wedge \big|_{Z_{C^*(M(\mathcal{A}); \bar{\alpha})}}$$

が成立する。

§4. compact 可換  $C^*$ -力学系  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  における  $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  について

今  $G$  を compact 可換群と仮定すると、 $P(\alpha)$  について次の使い易い補助定理を得る。

補助定理 4.1.  $P(\alpha) = \bigcap_x Sp(\alpha^{\overline{x\alpha x}})$  ただし  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathcal{A}^\alpha$  である。

この結果を用いると、 $\mathcal{A}$  が単純である仮定なしに、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  である為の十分条件を与えることができる。

命題 4.2.  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  を compact 可換な  $C^*$ -力学系とし、 $\mathcal{A}$  は単位元を持つとする。もし  $\mathcal{A}$  の部分  $C^*$ -代数  $\mathcal{B}$  で単純なものとし、 $C^*$ -力学系  $(\mathcal{B}, H, \beta)$  で、  
 (i)  $\mathcal{A}^\alpha \subset \mathcal{B}$ , (ii)  $\alpha_g \circ \beta_h = \beta_h \circ \alpha_g$  ( $g \in G, h \in H$ )  
 (iii)  $\mathcal{B}$  は  $\beta$ -central なる条件を満たすものが存在すれば、

$$Sp(\alpha) = P(\alpha)$$

が成立する。

次の節で、上の命題の仮定を満たす例を調べる。

さて次に、有限巡回群  $\mathbb{Z}_p$  を土台にした  $C^*$ -力学系  $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}_p, \alpha)$  に対する *Olesen-Pedersen-Størmer* の結果を compact 可換な  $C^*$ -力学系  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  に拡張する。しかし、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  は一般には、 $\mathcal{A}^\alpha$  の単純性には同値にならないことが次節で示される。

定理 4.3.  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  を  $C^*$ -力学系とし、今  $\mathcal{A}$  を素、 $G$  を可換 compact 群 と仮定する。そのとき、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  である為の必要十分条件は  $\mathcal{A}^\alpha$  が素であることである。

§5. CAR-代数  $\mathcal{A}(\mathcal{H})$  上の gauge 作用  $\alpha$  に対する  $P(\alpha)$  について

この節では、Fermion 代数の名で呼ばれる CAR-代数  $\mathcal{A}(\mathcal{H})$  上の gauge 作用  $\alpha$  について、その  $P(\alpha)$  と  $C^*(\mathcal{A}(\mathcal{H}); \alpha)$  を調べてみる。

可分な Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の CAR-代数  $\mathcal{A}(\mathcal{H})$  とは、

$$(5.1) \quad \begin{cases} [a(f), a(g)]_+ = a(f)a(g) + a(g)a(f) = 0 \\ [a(f), a(g)^*]_+ = \langle f|g \rangle 1 \end{cases} \quad (f, g \in \mathcal{H})$$

を満足する  $\mathcal{H}$  から他の Hilbert 空間  $\mathcal{K}$  上の有界作用素の空間  $\mathcal{L}(\mathcal{K})$  への線形写像  $f \mapsto a(f)$  の像  $a(f)$  全体と単位作用素から生成される  $C^*$ -代数を云う。 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$  が  $(2^\infty)_{\text{odd}}$ -型の UHF-代数になる事はよく知られている。今群  $G$  の unitary 表現  $U$  で表現空間を  $\mathcal{H}$  とすると、 $\alpha_g(a(f)) = a(U_g f)$  ( $g \in G, f \in \mathcal{H}$ ) なる条件を



満たす  $\alpha(\varphi)$  上の  $G$  の作用  $\alpha$  が決まる。特に、 $G$  を一次元 torus  $T^1$  とし、 $U_t = e^{it} 1_\varphi$  としたとき、対応する作用  $\alpha$  を  $\alpha(\varphi)$  上への  $T^1$  の gauge 作用と呼ぶ。この作用  $\alpha$  は  $\alpha(\varphi)$  上強連続であることは (5.1) を使って容易に分かる。(cf: [2]) よって、 $(\alpha(\varphi), T^1, \alpha)$  は  $C^*$ -力学系をなすが、我々は、この力学系が命題 4.2. の仮定を満たすことを示す。

$U^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) なる  $\varphi$  上の unitary 作用素  $U$  をとると、 $\beta_1(a(f)) = a(Uf)$  ( $f \in \varphi$ ) なる  $\alpha(\varphi)$  の自己同型写像  $\beta_1$  が定まる。 $\beta_n = (\beta_1)^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) とおくと、 $(\alpha(\varphi), \mathbb{Z}, \beta)$  は、 $\alpha_t \circ \beta_n = \beta_n \circ \alpha_t$  ( $t \in T^1, n \in \mathbb{Z}$ ) なる  $C^*$ -力学系となる。 $\gamma(a(f)) = -a(f)$  なる  $\alpha(\varphi)$  の自己同型写像  $\gamma$  をとり、 $\alpha(\varphi)$  の  $\gamma$  による不動点全体のなす  $C^*$ -代数  $\alpha(\varphi)^\gamma$  を  $\mathcal{B}$  とおく。そのとき、 $\mathcal{B}$  は  $\alpha(\varphi)$  に同型となるので UHF-代数になり単純である。([12]) 更に  $\mathcal{B}$  は  $\beta$ -central になる。([6])  $\alpha_t \in \mathcal{B}$  は容易に分かるので命題 4.2. より、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  となる。 $\alpha_t(a(f)) = e^{it} a(f)$  ( $f \in \varphi, t \in T^1$ ) より、 $1 \in Sp(\alpha)$  となる。 $P(\alpha)$  は群をなすので  $P(\alpha) = \mathbb{Z}$  を得る。よって、

命題 5.1. CAR-代数  $\alpha(\varphi)$  上への一次元 torus の gauge 作用  $\alpha$  に対して、

$$P(\alpha) = \mathbb{Z}$$

となる。

又、 $(\mathcal{A}(\mathcal{G}), T^1, \alpha)$  は  $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  であるが、 $\mathcal{A}^\alpha$  は単純ではない。実際、

$$m\mathcal{I}_n = \overline{\bigcup_{k=n+m}^{\infty} \bigoplus_{j=n}^{k-m} M_{*C_j}} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots)$$

は  $\mathcal{A}^\alpha$  の自明でない *ideal* である。ただし  $*C_j = k! / j!(k-j)!$  で  $M_{*C_j}$  は  $I_{*C_j}$ -型の因子代数をあらわす。([2]) 一方、 $\mathcal{A}$  は素であり、 $Sp(\alpha) = P(\alpha)$  より、定理 4.3. によって、 $\mathcal{A}^\alpha$  は素である。

系 5.2.  $\mathcal{A}$  は単純で  $Sp(\alpha) = P(\alpha)$ 、かつ  $\mathcal{A}^\alpha$  は単純でない、可換 compact  $C^*$ -カ学系  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  が存在する。

今から、 $P(\alpha)$  と  $\ker \hat{\alpha}|_{Z_{C^*(\mathcal{A}(\mathcal{G}); \alpha)}}$  との関係を調べる。その為に、 $C^*(\mathcal{A}(\mathcal{G}); \alpha)$  の構造を解析する必要がある。

$(\mathcal{A}, G, \alpha)$  を ~~(可換)~~  $C^*$ -カ学系とし、 $G$  を局所 compact 可換群とする。そのとき、 $C^*$ -カ学系  $(C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha}), G, \hat{\alpha})$  は  $(\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^2(G)), G, \alpha \otimes Ad(\lambda))$  に同値である。([13]) よって、 $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})^{\hat{\alpha}}$  は  $(\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^2(G)))^{\alpha \otimes Ad(\lambda)}$  に同型である。今  $G$  を compact と仮定すると、 $C^*(C^*(\mathcal{A}; \alpha); \hat{\alpha})^{\hat{\alpha}}$  は  $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  に同型である。よって次の命題を得る。

命題 5.3.  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  を  $C^*$ -カ学系とし、 $G$  を compact 可換群とする。 $C(L^2(G))$  を  $L^2(G)$  上の完全連続作用素全体のなす  $C^*$ -代数とし、 $\lambda$  を  $L^2(G)$  上の  $G$  の正則表現としたとき、

$$C^*(\mathcal{A}; \alpha) \simeq (\mathcal{A} \hat{\otimes}_* C(L^2(G)))^{\alpha \otimes Ad(\lambda)}$$

が成り立つ。

上の命題を使って主結果を導く為に、次の補助定理を用意する。

補助定理 5.4.  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  は命題 5.3. と同様な仮定をする。  $C^*$ -カテゴリー系  $(\mathcal{A} \otimes_* C(L^2(G)), G, \alpha \otimes \text{Ad}(\lambda))$  に対して、

$$P(\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)) = P(\alpha)$$

が成り立つ。

この補助定理と命題 5.3., 定理 4.3 を用いて次の主結果を得る。

定理 5.5.  $(\mathcal{A}, G, \alpha)$  は  $C^*$ -カテゴリー系とし、 $\mathcal{A}$  は素、 $G$  は compact 可換群とする。その時、 $C^*(\mathcal{A}; \alpha)$  が素である為の必要十分条件は、 $P(\alpha) = \widehat{G}$  であることである。

よって、 $(\mathcal{A}(G), T^1, \alpha)$  について、命題 5.1. と定理 5.5 より  $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$  は素になる。 $\mathcal{A}(G)$  は可分より、 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$  は可分になる。よって、 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$  は原始的である。 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$  は単位元を含まないので、 $\mathcal{Z}_{C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)} = (0)$  となる。このことより次の定理を得る。

定理 5.6. CAR-代数  $\mathcal{A}(G)$  上の一次元 torus  $T^1$  の gauge 作用  $\alpha$  に対して、 $C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)$  は原始的である。特に、

$$P(\alpha) = \ker \hat{\alpha}|_{\mathcal{Z}_{C^*(\mathcal{A}(G); \alpha)}} = \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

§注意1. 定理 5.6. に於いて,  $C^*(\mathcal{A}(\mathcal{G}); \alpha)$  は単純ではない.

§注意2. 定理 4.3. は Olesen-Pedersen-Størmer 著の "Compact abelian groups of automorphisms of simple  $C^*$ -algebras" Preprint (1976) の定理 1 と重複している.

§注意3.  $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha)$  を compact abelian  $C^*$ -dynamical system としたとき,

$$C^*(\mathcal{A}; \alpha) \simeq \overline{\text{span}} \{ \alpha^p(\{1\}) \otimes C^*(\mathcal{G}) \hat{u}_p : p \in \hat{\mathcal{G}} \}$$

となる.

## 文献

- [1] C.A. Akemann, G.K. Pedersen and J. Tomiyama : Multipliers of  $C^*$  algebras, *J. Func. Anal.* 13 (1973), 277-301.
- [2] O. Bratteli : Inductive limits of finite dimensional  $C^*$ -algebras, *Trans. Amer. Math. Sci.* 172 (1972), 195-234.
- [3] A. Connes : Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. École. Nor. Sup.* 4<sup>e</sup>, t. 6. (1973), 133-252.
- [4] A. Connes and M. Takesaki : The flow of weights on factors of type III. Preprint (1975)
- [5] J. Dixmier : Sur les  $C^*$ -algèbres, *Bull. Soc. Math. France.* t. 88 (1960), 95-112.
- [6] R. H. Hermann and M. Takesaki : States and automorphism groups of operator algebras, *Comm. Math. Phys.* 19 (1970), 142-160.
- [7] T. Imai and H. Takai : On a duality for  $C^*$ -crossed products by a locally compact group. Preprint (1976)
- [8] A. Kishimoto and H. Takai : On an invariant  $T(\alpha)$  in  $C^*$ -dynamical systems, To appear in *Tohoku Math. J.*
- [9] Y. Nakagami : Dual action of a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group,

submitted to Publ. RIMS, Kyoto Univ.

- [10] D. Olesen : Inner  $*$ -automorphisms of simple  $C^*$ -algebras,  
Comm. Math. Phys. 44 (1975), 175-190.
- [11] D. Olesen, G.K. Pedersen and E. Størmer : Periodic automorphisms of simple  $C^*$ -algebras, Preprint (1976).
- [12] E. Størmer : The even CAR-algebra, Comm. Math. Phys. 16. (1970), 136-137.
- [13] H. Takai : On a duality for crossed products of  $C^*$ -algebras, J. Func. Anal. 19 (1975), 25-39.
- [14] H. Takai : The quasi-orbit space of continuous  $C^*$ -dynamical systems, Trans. Amer. Math. Soc. 216 (1976), 105-113.
- [15] M. Takesaki : Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta. Math. 131 (1973), 249-310.
- [16] G. Zeller-Meier : Produits croisés d'une  $C^*$ -algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et appl. 47 (1968), 101-239.
- [17] M. Takesaki : A liminal crossed product of a uniformly hyperfinite  $C^*$ -algebra by a compact abelian automorphism group, J. Func Anal 7 (1971), 140-146.